Нехай $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$. Тоді $t^2 + t - 2 > 0$. Розв'язавши цю нерівність, отримуємо $\left[\begin{array}{l} t > 1, \\ t < -2. \end{array}\right.$ Звідси:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^x > 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x < -2. \end{array}\right.$$

З нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$ знаходимо, що $x < 0$. Нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^x < -2$ не має розв'язків.

Відповідь: $(-\infty; 0)$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $3^x + 4^x > 5^x$.

Розв'язання. Маємо: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$.

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Зауважимо, що $f(2) = 1$. Оскільки функція f — спадна, то при $x < 2$ виконується нерівність $f(x) > f(2)$, а при $x > 2$ виконується нерівність $f(x) < f(2)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $f(x) > f(2)$, тобто нерівності $f(x) > 1$, є проміжок $(-\infty; 2)$. ●

Вправи

18.1.° Чи рівносильні нерівності:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ і $2x + 4 > x - 1$;
2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x^2+2}$ і $x^2 - 4 < x^2 + 2$;
3) $a^x > a^5$, де $a > 1$, і $x > 5$;
4) $a^x < a^{-3}$, де $0 < a < 1$, і $x < -3$?